$j^{\cdot}$, dernier épisode

$X = {}_K\backslash^{G(\mathbb{R})}$ $\qquad \Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ gpe arith.
(sans torsion)

$$j^q : I^{\Gamma, q}_{G(\mathbb{R})} \longrightarrow H^q(X/\Gamma) \simeq H^q(\Gamma, \mathbb{R})$$

$\uparrow$
formes diff. $G(\mathbb{R})^\circ$ Γ-inv. $\quad (d=0)$

La dernière fois :

$$I^{\Gamma, \cdot}_{G(\mathbb{R})} \hookrightarrow \Omega^{\cdot}_{X/\Gamma}[\log](\overline{X}/\Gamma) \underset{\text{qis}}{\hookrightarrow} \Omega^{\cdot}_{X/\Gamma}(X/\Gamma)$$

P_0 parabolique minimal de G.

$c(G) := \max\Big\{ q \;\Big|\; \forall$ poids ν de A_{P_0} apparaissant dans $\bigoplus_{i \leq q} \Lambda^i \operatorname{Lie} U_{P_0}(\mathbb{R})^*$

on a $\rho + \nu \gg 0$, càd $= \sum_i x_i \alpha_i$, $x_i > 0 \Big\}$

$\forall q \leq c(G)$, les formes dans $\Omega^q_{X/\Gamma}[\log](\overline{X}/\Gamma)$

sont L^2

<u>Thm</u>: 1) j^q est inj. pour $q \leq c(G)+1$

2) j^q est surj. pour $q \leq \min(c(G), m(G_{\mathbb{R}}))$

<u>preuve</u>: 1) Rappel: les élts de $I^{\Gamma, q}_{G(\mathbb{R})}$ sont

harmoniques: exposé de François: $d=0$, et stable par $*$, donc $\delta = 0$ aussi

exposé de Vincent: $C=0$ sur la repr. triv. de $G(\mathbb{R})^0$.

et L^2: exposé de Joaquín

exposé de Riccardo: Prop. 2.5 de Borel. sur une variété Riem. connexe complète orientée,

$$\mathcal{H}^q_{(2)} \cap d(\Omega^{q-1}_{(2)}) = 0$$

si $\sigma \in I^{\Gamma, q}_{G(\mathbb{R})}$ s'envoie sur 0 dans $H^q(X/\Gamma)$

$(q-1)$-forme

$\exists\, \tau$ à croissance log. tq $\sigma = d\tau$

si $q \leq c(G)+1$, τ L^2 donc $\sigma = 0$.

2) Supposons $q \leq c(G)$. Toute classe dans $H^q(X/\Gamma)$ est repr. par une forme à croissance log., donc L^2.

exposé de Vincent : thm de Garland :

$$
\begin{array}{ccc}
I^{\Gamma, q}_{G(\mathbb{R})} & \longrightarrow & H^q_{(2)}(X/\Gamma) \quad \text{iso. pour } q \leq m(G_{\mathbb{R}}) \\
 & & \Big\downarrow \ \text{surj. par } q \leq c(G) \\
 & & H^q(X/\Gamma)
\end{array}
$$

$\square$

Améliorations :

1) Au thm de Garland : si π repr. unitaire irr. de $G(\mathbb{R})$ non triviale, minorer

$\min\{ i \mid H^i(\mathfrak{g}, K ; \pi) \neq 0 \}$

Vogan-Zuckerman ont classifié les π tq $\exists i, H^i(\ldots) \neq 0$

et calculé leur cohomologie.

Kumaresan (voir aussi Borel-Wallach)

2) Critère "$\exists$ d'un repr. L^2 dans $H^q(X/\Gamma)$"

Garland-Hsiang : dans la déf. de $c(G)$, on peut remplacer $\bigoplus_{i \leq q} \Lambda^i \operatorname{Lie} U_P(\mathbb{R})^*$ par une sous-$M_P(\mathbb{R})$-repr. explicite.

ω^i — $A_{P,(+)}$, X_P, $U_P(\mathbb{R})$

<u>Thm</u> (Kostant) : Notation temporaire : $\mathfrak{g}$ = alg. de Lie ss complexe, $\mathfrak{p}$ ss-alg de Lie parabolique de rad. unipotent $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}/\mathfrak{u}$

$V = V(\mathfrak{g}, \lambda)$ repr. irr. de $\mathfrak{g}$ de poids dom. λ

$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ Borel $\quad \mathfrak{t} \subset \mathfrak{b}$ Cartan

Alors $H^q(\mathfrak{u}, V)$ est un $\mathfrak{m}$-module

restr. à $\mathfrak{u}$

$$\simeq \bigoplus_{\substack{w \in W(\mathfrak{t},\mathfrak{g}) \\ \text{tq } w^{-1}(\text{racines pos. de } \mathfrak{t} \text{ dans } \mathfrak{m}) \subset \text{racines pos.} \\ \text{et } \ell(w) = q}} V(\mathfrak{m}, \underbrace{w(\lambda+\rho)-\rho}_{\text{poids dom. pour l'image de } \mathfrak{b} \text{ dans } \mathfrak{m}})$$

$W(\mathfrak{p},\mathfrak{g})$: l'ensemble des w de cette somme.

$\bigsqcup_q W(\mathfrak{p}, q)$ est un ens. de repr.

de $W(\mathfrak{t},\mathfrak{m})\backslash W(\mathfrak{t},\mathfrak{g})$

Rappel : $H^q(\mathfrak{u}, V) = H^q(C^{\cdot}(\mathfrak{u}, V))$

où $C^i(\mathfrak{u}, V) = \Lambda^i \mathfrak{u}^* \otimes V \quad \circlearrowleft \mathfrak{p}$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{p}\text{-modules} \arrow[r, "\text{oubli}"] \arrow[d, "\mathfrak{u}\text{-inv}"] & \mathfrak{u}\text{-modules} \arrow[d, "\mathfrak{u}\text{-inv}"] \\
\mathfrak{m}\text{-mod} \arrow[r, "\text{oubli}"'] & \mathbb{C}\text{-ev}
\end{tikzcd}$$

---

idée de la preuve : on fixe une forme réelle compacte $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ $\quad (\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0)$

Cela donne :

- une section $\mathfrak{m} \to \mathfrak{p}$, d'image $\mathfrak{p} \cap \overline{\mathfrak{p}}$ $\quad$ cc $/\mathfrak{g}_0$

- tout un tas de formes hermitiennes >0 naturelles

$\rightsquigarrow$ d^* = adjoint de $d : C^q(\mathfrak{u}, V) \to C^{q+1}(\mathfrak{u}, V)$

$\Delta := dd^* + d^*d$

et $H^q(\mathfrak{u}, V) \leftarrow C^q(\mathfrak{u}, V)[\Delta = 0]$

Calcul : sur la composante m-isotypique de poids dom. ξ dans $C^\bullet(\mathfrak{u}, V)$, Δ agit par

$$\frac{1}{2}\left(|\lambda+\rho|^2 - |\xi+\rho|^2\right)$$

"gros" Domaine de Siegel $\overbrace{\simeq}^{S_{P,t}} A_{P,(t)} \times \overbrace{X_P \times U_P(\mathbb{R})}^{S'_{P,(t)}}$

On s'intéresse aux formes diff. inv. par $\Gamma_P := \Gamma \cap P(\mathbb{Q})$

$\Gamma_P \subset {}^\circ P(\mathbb{Q})$

$$H^\bullet\left(A_{P,(t)} \times (\dots)/\Gamma_P\right) \simeq H^\bullet\left((X_P \times U_P(\mathbb{R}))/\Gamma_P\right)$$

$$\pi_P : S'_{P,t} \longrightarrow S'_{P,t}/U_P(\mathbb{R})$$

Thm: $\left(\pi_{P,*}\Omega^\bullet_X\right)^{U_P(\mathbb{R})} \hookrightarrow \left(\pi_{P,*}\Omega^\bullet_X\right)^{\Gamma\cap U_P(\mathbb{Q})}$.

est un qis. ($\overline{\Gamma}_P :=$ image de Γ_P dans $M_P(\mathbb{Q})$)
-équiv.

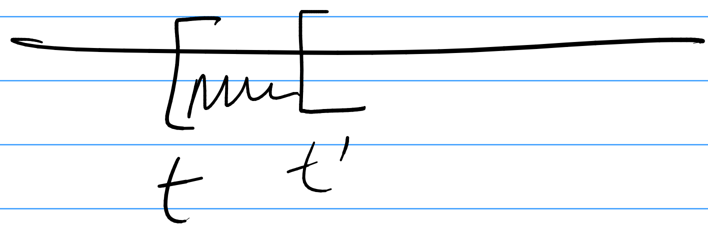
traduction globale : une forme diff. sur $S'_{P,t}/\Gamma_P$
est coh. à une forme diff $U_P(\mathbb{R})$-inv.

preuve : si U_P abélien : on moyenne sur
$U_P(\mathbb{R})/\Gamma\cap U_P(\mathbb{Q})$ $\left(\simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\cdot\cdot}\right)$

en g^{al}, on filtre $U_P \supset [U_P, U_P] \supset \dots \supset$ central

□

$\rightsquigarrow$ on voit apparaître la coh. de dR d'un complexe de syst. local
sur $X_P/\overline{\Gamma}_P$



récurrence pas facile quand $rg(G)$ $(= \dim A_{P_0}) > 1$

3) $c(G)$ est non optimale (pour la prop. L^2) : Harder $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(SL_{2,F})$ $F/\mathbb{Q}$

Constante Garland-Hsiang pour $SL_n/\mathbb{Q}$:

$$\rho = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots, \frac{1-n}{2}\right)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{t}^* \qquad \sum_i \lambda_i = 0$$

$$\lambda \gg 0 \iff \left[\begin{array}{l} \lambda_1 > 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 > 0, \dots \\ \text{et } \sum_{i < n} \lambda_i > 0 \end{array}\right.$$

$w(\rho) \gg 0 \quad \forall w$ tq $\ell(w) \leq q$?